



۱ در یک دنباله‌ی عددی، مجموع چهار جمله‌ی اول ۱۵ و مجموع پنج جمله‌ی بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله‌ی یازدهم این دنباله کدام است؟

- ۱) ۷٫۵ ۲) ۸ ۳) ۸٫۵ ۴) ۹

۲ در یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت، نسبت جمله‌ی ششم به جمله‌ی دوم برابر ۱۶ است. اگر مجموع جملات دوم و ششم برابر ۶۸ باشد، جمله‌ی سوم دنباله کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) ۱۶ ۳) ۳۲ ۴) ۲۴

۳ در یک دنباله‌ی هندسی مجموع جملات اول، دوم و سوم برابر ۲۶ و مجموع جملات سوم، چهارم و پنجم برابر ۲۳۴ است. جمله‌ی نهم در این دنباله چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

- ۱) ۹ ۲) ۳ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۴ اگر در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی ششم ثلث جمله‌ی دهم آن باشد، جمله‌ی چندم این دنباله برابر صفر است؟

- ۱) سوم ۲) چهارم ۳) پنجم ۴) هفتم

۵ در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی اول ۸ برابر جمله‌ی چهارم باشد. آنگاه جمله‌ی هشتم چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{3}$

۶ کدام یک از دنباله‌های زیر دنباله‌ی عددی نیست؟

- ۱) $t_n = 8n + 1$ ۲) $t_n = n + 3$ ۳) $t_n = \frac{1}{n}$ ۴) $t_n = 2n + 34$

۷ جمله‌ی هشتم از دنباله‌ی حسابی ۱، ۳، ۵، ... با جمله‌ی چندم یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی عمومی $t_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$ برابر است؟

- ۱) سوم ۲) پنجم ۳) ششم ۴) هشتم

۸ اگر جمله سوم و پنجم یک دنباله حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر ۳۳ و ۱۹ باشد، چند جمله این دنباله مثبت است؟

- ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۱۳

۹ اگر بین دو عدد ۷ و ۱۷۰۱، چهار واسطه هندسی درج کنیم، نسبت بزرگ‌ترین واسطه به کوچک‌ترین واسطه کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۸۱

۱۰ مجموع سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر با ۴۵ و حاصل ضرب این جملات برابر با ۳۲۴۰ است. قدرنسبت این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۱ جملات دهم، یازدهم و دوازدهم یک دنباله حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر $2a$ ، $a - 3$ ، $4a - 1$ هستند. جمله پنجم این دنباله کدام است؟

- ۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{17}{4}$ ۳) $\frac{21}{4}$ ۴) $\frac{25}{4}$



۱۲) اگر جملات $8x$, $x + 6$, $x - 3$, $(x > 0)$ ، به ترتیب از چپ به راست جملات اول، سوم و پنجم از یک دنباله‌ی هندسی با جملات افزایشی باشند، قدر نسبت دنباله کدام است؟

۴) $\sqrt{2}$

۳) ۶

۲) ۴

۱) ۲

۱۳) اگر جملات چهارم و ششم و نهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند. قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۴) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{4}{3}$

۲) $\frac{3}{2}$

۱) $\frac{2}{3}$

۱۴) یک کوه یخی هزار تنی، هر روز $\frac{2}{5}$ وزن خود را از دست می‌دهد. بعد از گذشت ۴ روز:

۴) حدود $\frac{2}{100}$ آن باقی می‌ماند.

۳) تقریباً نصف آن آب می‌شود.

۲) حدود $\frac{1}{8}$ آن باقی می‌ماند.

۱) چیزی از آن باقی نمی‌ماند.



پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{cases} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} (-5) \times \begin{cases} 4a_1 + 6d = 15 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -20a_1 - 30d = -75 \\ 5a_1 + 30d = 30 \end{cases} \Rightarrow -15a_1 = -45 \Rightarrow a_1 = 3, d = \frac{1}{2}$$

$$a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10 \left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ برقرار است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$\frac{a_6}{a_2} = 16 \Rightarrow \frac{a_1 q^5}{a_1 q} = 16 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = 2 \quad \text{جملات مثبت}$$

$$a_2 + a_6 = 68 \Rightarrow a_1 q + a_1 q^5 = 68 \xrightarrow{q=2} 2a_1 + 32a_1 = 68 \Rightarrow 34a_1 = 68 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$a_3 = a_1 q^2 = 2 \times 2^2 = 8$$

جمله عمومی یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q به صورت $a_n = a_1 q^{n-1}$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$a_1 + a_2 + a_3 = 26 \Rightarrow a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 26 \Rightarrow a_1(1 + q + q^2) = 26 \quad (I)$$

$$a_3 + a_6 + a_9 = 234 \Rightarrow a_1 q^2 + a_1 q^5 + a_1 q^8 = 234 \Rightarrow a_1 q^2(1 + q + q^2) = 234 \quad (II)$$

از تقسیم عبارت II بر I داریم:

$$\frac{a_1 q^2(1 + q + q^2)}{a_1(1 + q + q^2)} = \frac{234}{26} \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow \frac{a_9}{a_3} = \frac{a_1 q^8}{a_1 q^2} = q^6 = (q^2)^3 = 9^3 = 81$$

در هر دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ برقرار است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$a_2 = \frac{1}{3}a_{10} \rightarrow a_{10} = 3a_2$$

$$\Rightarrow a_1 + 9d = 3(a_1 + 9d) \Rightarrow a_1 + 9d = 3a_1 + 27d$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 18d = 0 \Rightarrow 2(a_1 + 9d) = 0 \Rightarrow a_1 + 9d = 0 \Rightarrow a_9 = 0$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

در هر دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدر نسبت q جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ بدست می آید.

$$a_1 = 8a_8 \Rightarrow a_1 = 8a_1 q^7 \Rightarrow q^7 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\text{پس: } \frac{a_8}{a_5} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q^4} = q^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

در دنباله عددی ضابطه t_n باید درجه اول باشد. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

جمله عمومی یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$a_8 = a_1 + 7d = -1 + 7 \times 4 = 27$$

حال ببینیم جمله چندم از دنباله هندسی $a_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$ برابر با ۲۷ است:

$$27 = \frac{1}{3} \times 9^{n-1} \Rightarrow 81 = 9^{n-1} \Rightarrow 9^2 = 9^{n-1} \Rightarrow 2 = n-1 \Rightarrow n = 3$$

جمله عمومی یک دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$t_3 = 33 \Rightarrow t_1 + 2d = 33$$

$$t_5 = 19 \Rightarrow t_1 + 4d = 19 \Rightarrow t_1 = 47, d = -7$$

جمله عمومی دنباله را تعیین می کنیم و بزرگتر از صفر قرار می دهیم تا تعداد جملات مثبت بدست آید:

$$t_n = 47 + (n-1)(-7) = -7n + 54$$

$$\rightarrow -7n + 54 > 0 \Rightarrow 7n < 54 \Rightarrow n < \frac{54}{7} \Rightarrow n < 7.7 \dots \Rightarrow n \leq 7$$

یعنی دنباله ۷ جمله مثبت دارد.

اگر بین دو عدد a, b واسطه هندسی درج کنیم قدر نسبت از رابطه $q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ بدست می آید. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$q = \sqrt[5]{\frac{1701}{7}} = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3 \rightarrow 7, 21, 63, 189, 567, 1701$$



بنابراین نسبت بزرگترین واسطه به کوچکترین واسطه، $\frac{۵۶۷}{۲۱} = ۲۷$ است.

سه جمله متوالی دنباله حسابی را به صورت $x - d, x, x + d$ نشان می‌دهند.

با توجه به این که مجموع سه جمله برابر ۴۵ است، پس:

$$(x - d) + x + (x + d) = ۴۵ \Rightarrow ۳x = ۴۵ \Rightarrow x = ۱۵$$

با جای گذاری $x = ۱۵$ و با توجه به این که حاصل ضرب سه جمله برابر با ۳۲۴۰ است، داریم:

$$(۱۵ - d) \times ۱۵ \times (۱۵ + d) = ۳۲۴۰ \Rightarrow (۱۵ - d)(۱۵ + d) = \frac{۳۲۴۰}{۱۵} = ۲۱۶$$

$$\Rightarrow ۲۲۵ - d^2 = ۲۱۶ \Rightarrow d^2 = ۹ \Rightarrow d = \pm ۳$$

اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند آن گاه $\frac{a+c}{۲} = b$ است پس:

$$a_{۱۱} = \frac{a_{۱۰} + a_{۱۲}}{۲} \Rightarrow a - ۳ = \frac{۲a + (۴a - ۱)}{۲} \Rightarrow ۲a - ۶ = ۶a - ۱ \Rightarrow ۴a = -۵ \Rightarrow a = -\frac{۵}{۴}$$

$$\begin{cases} a_{۱۰} = -\frac{۵}{۲} \\ a_{۱۱} = -\frac{۱۷}{۴} \Rightarrow d = (-۶) - (-\frac{۱۷}{۴}) = -\frac{۷}{۴} \\ a_{۱۲} = -۶ \end{cases}$$

اگر a_m, a_n دو جمله یک دنباله حسابی باشند $a_m - a_n = (m - n)d$ است پس:

$$a_{۱۰} - a_۵ = ۵d \Rightarrow a_۵ = a_{۱۰} - ۵d = -\frac{۵}{۲} - ۵(-\frac{۷}{۴}) = -\frac{۵}{۲} + \frac{۳۵}{۴} = \frac{۲۵}{۴}$$

طبق قاعده‌ی اندیس‌ها در دنباله‌ی هندسی اگر $m + n = p + q$ باشد آن گاه $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ است.

پس $a_۱ \times a_۵ = a_۳^۲$ است.

$$\text{پس: } (x + ۶)^2 = (x - ۳)(۸x) \rightarrow x^2 + ۳۶ + ۱۲x = ۸x^2 - ۲۴x$$

$$\rightarrow ۷x^2 - ۳۶x - ۳۶ = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = ۳۶^2 + ۴(۷)(۳۶)$$

$$= ۳۶(۳۶ + ۲۸) = ۳۶ \times ۶۴ \rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۳۶ + ۶ \times ۸}{۱۴} = \frac{۸۴}{۱۴} = ۶ \\ x_۲ = \frac{۳۶ - ۶ \times ۸}{۱۴} = \frac{-۱۲}{۱۴} = -\frac{۶}{۷} \end{cases}$$

دقت کنید وقتی $x = ۶$ است جملات اول و سوم و پنجم دنباله به صورت ۳، ۱۲، ۴۸ در می‌آیند.

$$\frac{a_۳}{a_۱} = q^2 \rightarrow q^2 = \frac{۱۲}{۳} = ۴ \rightarrow \begin{cases} q = ۲ \\ q = -۲ \end{cases}$$

چون جملات دنباله افزایش یافته است $q = -۲$ قابل قبول نیست.

روش اول:

در هر دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a_۱$ و قدر نسبت d ، جمله‌ی n ام از رابطه‌ی $a_n = a_۱ + (n - 1)d$ بدست می‌آید و اگر a, b, c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند آن گاه $b^2 = ac$ است.

$$a_۴, a_۶, a_۹$$

$$a_۱ + ۳d, a_۱ + ۵d, a_۱ + ۸d \Rightarrow (a_۱ + ۵d)^2 = (a_۱ + ۳d)(a_۱ + ۸d)$$

$$a_۱^2 + ۲۵d^2 + ۱۰a_۱d = a_۱^2 + ۱۱a_۱d + ۲۴d^2 \Rightarrow a_۱d = d^2 \Rightarrow a_۱ = d$$

$$۴d, ۶d, ۹d \Rightarrow q = \frac{۶d}{۴d} = \frac{۳}{۲}$$

روش دوم:

اگر $a_m, a_n, a_p, \dots$ جملات یک دنباله‌ی حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند قدر نسبت دنباله‌ی هندسی از این رابطه بدست می‌آید:

$$q = \frac{p - n}{n - m} \Rightarrow q = \frac{۹ - ۶}{۶ - ۴} = \frac{۳}{۲}$$

چون هر روز $\frac{۲}{۵}$ وزن خود را از دست می‌دهد پس در هر روز $\frac{۳}{۵}$ از آن باقی می‌ماند پس از گذشت ۴ روز معادل $(\frac{۳}{۵})^4 = ۰,۱۲۹۶$ که تقریباً معادل $\frac{۱}{۸}$ آن است باقی می‌ماند.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴